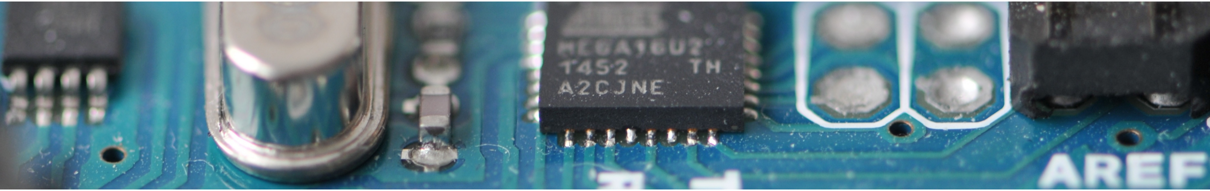
universität innsbruck




# Rechnerarchitektur

## Kombinatorische Logik I

Univ.-Prof. Dr.-Ing. Rainer Böhme

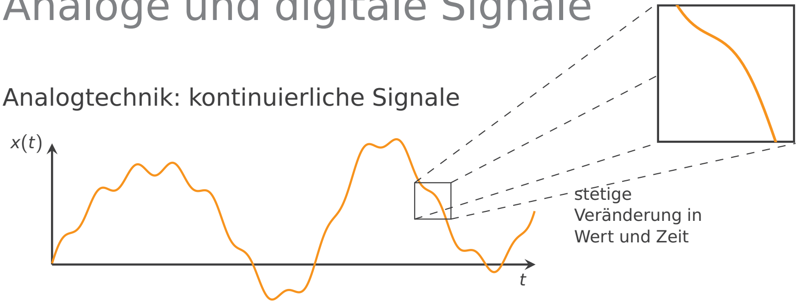
Wintersemester 2020/21 · 14. Oktober 2020

# Gliederung heute

1. **Grundlagen der Digitaltechnik**
2. Boolesche Algebra
3. Realisierung in Schaltungen

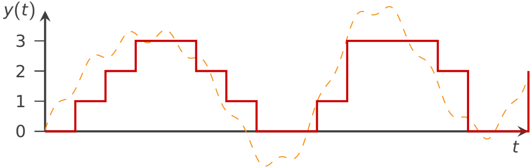
# Analoge und digitale Signale

## Analogtechnik: kontinuierliche Signale




stetige Veränderung in Wert und Zeit

## Digitaltechnik: diskrete Signale (oft auch binär)



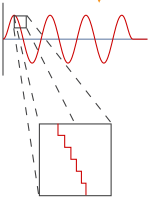

sprunghafter Wechsel zu festen Zeitpunkten zwischen endlich vielen Werten

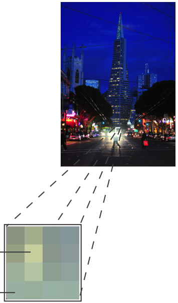
# Digitale Daten

Alle Arten von Daten werden digital als **diskrete Zahlen** gespeichert.

Zuordnungen existieren z. B. für Texte, Töne und Bilder.


| **Zeichen** | **ASCII-Wert** |
|---|---|
| ... | ... |
| G | 71 |
| H | 72 |
| ... | ... |






Digitalrechner können nur digitale Daten verarbeiten.

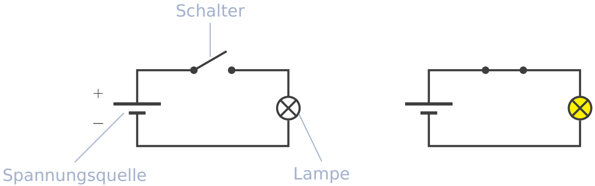
# Vergleich von Analog- und Digitaltechnik

| Analogrechner | Digitalrechner |
|---|---|
| + Multiplikation, Addition und Filter leicht realisierbar | + weniger störanfällig (z. B. Rauschen) |
| + geringer Flächenbedarf | + beliebig hohe Genauigkeit erreichbar |
| + sehr schnell | + exakte Reproduktion und Übertragung von Daten |
| – nichtlineare Bauteile | + einfacher, modularer Entwurf |
| – niedrige Genauigkeit | – oft hoher Flächenbedarf |
| – temperaturabhängig | – hoher Energieverbrauch |
| – Langzeitspeicherung von Daten schwierig | |

Kompromiss zwischen Analog- und Digitaltechnik: Hybridrechner

# Digitaltechnik

Darstellung als elektrische Schaltung




Zwei Zustände:

0. **Strom fließt nicht** (Lampe leuchtet nicht)
1. **Strom fließt** (Lampe leuchtet)

# Varianten der Binärdarstellung

Interpretation der digitalen Zustände

| | | | |
|---|---|---|---|
| logisch | F **falsch** (engl. false) | ⟷ | T **wahr** (engl. true) |
| algebraisch | **0** | ⟷ | **1** |
| physikalisch | **L** low 0–0.4 V | ⟷ | **H** high 2.4–5 V |

Beispiel: positive Logik mit TTL-Ausgangspegeln

# Konventionen in der kombinatorischen Logik

- Präferenz der digitalen Zustandsmenge $\{0, 1\}$
- Realisierung elementarer Operatoren durch **Gatter**
- Realisierung komplexer Funktionen durch Verschalten von Gattern
- Vektorschreibweise für mehrstellige digitale Zustände:

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \{0, 1\}^n$$

- Die **Dimension** $n$ ist dabei oft implizit.

**Vorsicht !**

InformatikerInnen zählen mitunter auch von 0 bis $n - 1$
(angelehnt z. B. an Felder in den Programmiersprachen C und Java).

# Gliederung heute

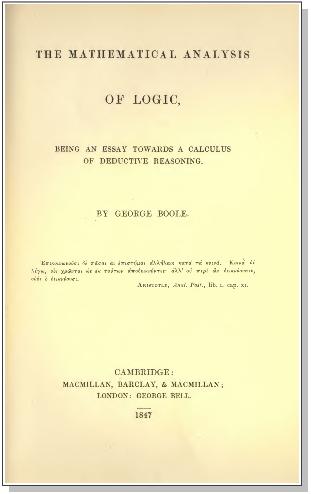
1. Grundlagen der Digitaltechnik
2. **Boolesche Algebra**
3. Realisierung in Schaltungen

# Boolesche Algebra

nach **George Boole** (1815–1864)

- Verbindung von Philosophie (Logik) und Mathematik (Rechenregeln)
- Grundlage für heutige Rechner-Hardware
- Dient dem Entwurf, der Beschreibung, Berechnung und Vereinfachung von Schaltungen und Schaltwerken für die Verarbeitung binärer Größen
- gleichzeitig Grundlage der Theoretischen Informatik

  $\rightarrow$ *Einführung in die Theoretische Informatik*


THE MATHEMATICAL ANALYSIS

OF LOGIC,

BEING AN ESSAY TOWARDS A CALCULUS
OF DEDUCTIVE REASONING.

BY GEORGE BOOLE.

Ἐπικοινωνοῦσι δὲ πᾶσαι αἱ ἐπιστῆμαι ἀλλήλαις κατὰ τὰ κοινά. Κοινὰ δὲ λέγω, οἷς χρῶνται ὡς ἐκ τούτων ἀποδεικνύντες· ἀλλ' οὐ περὶ ὧν δεικνύουσιν, οὐδὲ ὃ δεικνύουσι.

ARISTOTLE, *Anal. Post.*, lib. I. cap. XI.

CAMBRIDGE:
MACMILLAN, BARCLAY, & MACMILLAN;
LONDON: GEORGE BELL.

1847

# Operatoren

- Gegeben sei die Boolesche Menge $\mathbb{B}$ oft $\mathbb{B} = \{0, 1\}$
- Definition von Operatoren auf Variablen $x_1, x_2 \in \mathbb{B}$ z. B. $+$, $\cdot$, $-$
- Vollständige Bestimmung durch **Wahrheitstabelle**
- Die Schreibweise der Operatoren kann variieren.

Achten Sie jedoch auf Konsistenz bei eigener Verwendung !

# Elementare Operatoren

## OR-Operator

logische Summe (ODER)

$+ \quad \vee$

| $x_1$ | $x_2$ | $x_1$ OR $x_2$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

Das Ergebnis ist 1, falls **mindestens ein** Operand den Wert 1 annimmt.

## AND-Operator

logisches Produkt (UND)

$\cdot \quad * \quad \wedge$

| $x_1$ | $x_2$ | $x_1$ AND $x_2$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

Das Ergebnis ist 1, genau dann wenn **beide** Operanden den Wert 1 annehmen.

## NOT-Operator

Invertierung (NICHT)

$\overline{x} \quad -x \quad \neg$

| $x$ | NOT $x$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

Das Ergebnis ist 1, genau dann wenn der Operand den Wert 0 annimmt.

# Boolesche Algebra

(im engeren Sinne)

**Definition**

Die Kombination der Booleschen Menge $\mathbb{B}$ mit den Operatoren OR, AND und NOT wird als **boolesche Algebra** bezeichnet.

**Schreibweisen**

- $(\mathbb{B}, \text{AND}, \text{OR}, \text{NOT})$
- $(\mathbb{B}, \cdot, +, -) \quad = \quad (\{0, 1\}, \cdot, +, -)$
- $\mathbb{B}(\wedge, \vee, \neg)$ auch $B(\wedge, \vee, \neg)$

Ähnlich wie in der Schulalgebra kann der Punkt-Operator (UND) bei Ausdrücken auch weggelassen werden: $x_1 \cdot x_2 \Leftrightarrow x_1 x_2$

Es gilt Punkt vor Strich.

# Axiome

der Booleschen Algebra zur Umformung logischer Gleichungen

**Kommutativität**

$$x_1 + x_2 = x_2 + x_1 \tag{1}$$

$$x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1 \tag{2}$$

**Distributivität**

$$x_1 \cdot (x_2 + x_3) = (x_1 \cdot x_2) + (x_1 \cdot x_3) \tag{3}$$

$$x_1 + (x_2 \cdot x_3) = (x_1 + x_2) \cdot (x_1 + x_3) \tag{4}$$

**Neutrale Elemente**

$$0 + x = x \tag{5}$$

$$1 \cdot x = x \tag{6}$$

**Komplementäres Element**

$$x + \overline{x} = 1 \tag{7}$$

$$x \cdot \overline{x} = 0 \tag{8}$$

# Sätze

abgeleitet aus den Axiomen

**Idempotenz**

$$x + x = x \tag{9}$$

$$x \cdot x = x \tag{10}$$

**Assoziativität**

$$x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3 \tag{11}$$

$$x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) = (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3 \tag{12}$$

**Absorption**

$$x_1 + (x_1 \cdot x_2) = x_1 \tag{13}$$

$$x_1 \cdot (x_1 + x_2) = x_1 \tag{14}$$

**Substitution**

$$x + 1 = 1 \tag{15}$$

$$x \cdot 0 = 0 \tag{16}$$

**Doppelnegation**

$$\overline{\overline{x}} = x \tag{17}$$

# Weitere Gesetzmäßigkeiten

**Komplementäre Werte** $\overline{0} = 1$ und $\overline{1} = 0$

**Abgeschlossenheit**
Boolesche Operationen liefern nur boolesche Werte als Ergebnis.

**Dualität**
Für jede aus Axiomen ableitbare Aussage existiert eine duale Aussage.

Diese erhält man durch Tausch der Operatoren $+$ und $\cdot$ sowie der Werte 0, 1.

**De Morgansche Gesetze** (folgende Folien)

# Die De Morganschen Gesetze

Das 1. De Morgansche Gesetz lautet: $\overline{x_1 \cdot x_2} = \overline{x_1} + \overline{x_2}$

| $x_1$ $x_2$ | $x_1 \cdot x_2$ | $\overline{x_1 \cdot x_2}$ | $\overline{x_1}$ $\overline{x_2}$ | $\overline{x_1} + \overline{x_2}$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 0 | 0 | **1** | 1 1 | **1** |
| 0 1 | 0 | **1** | 1 0 | **1** |
| 1 0 | 0 | **1** | 0 1 | **1** |
| 1 1 | 1 | **0** | 0 0 | **0** |

# Die De Morganschen Gesetze (Forts.)

Das 2. De Morgansche Gesetz lautet: $\overline{x_1 + x_2} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$

| $x_1$ | $x_2$ | $x_1 + x_2$ | $\overline{x_1 + x_2}$ | $\overline{x_1}$ | $\overline{x_2}$ | $\overline{x_1} \cdot \overline{x_2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | **1** | 1 | 1 | **1** |
| 0 | 1 | 1 | **0** | 1 | 0 | **0** |
| 1 | 0 | 1 | **0** | 0 | 1 | **0** |
| 1 | 1 | 1 | **0** | 0 | 0 | **0** |

# Die De Morganschen Gesetze (Forts.)

**Negation mithilfe der De Morganschen Gesetze**

Negation von Termen erfolgt durch Tausch der Operatoren $+$ und $\cdot$ sowie Komplementierung aller Variablen.

Beispiel:

$$\overline{(x_1 + x_2) \cdot \overline{x_3}}$$

$$=$$

$$(\overline{x_1} \cdot \overline{x_2}) + x_3$$

# Schaltfunktionen

**Definition**

Eine Funktion $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^m$ mit $n, m \geq 1$ heißt **Schaltfunktion**.

**Spezialfall**

Eine Schaltfunktion mit $m = 1$ heißt $n$-stellige **Boolesche Funktion**.

Beschreibung Boolescher Funktionen:

1. eindeutig mit (sortierter) **Wahrheitstabelle**
2. kompakter, aber nicht eindeutig mit **Booleschem Ausdruck** (aus Booleschen Variablen und Operationen)

$\rightarrow$ Jede **Schaltfunktion** kann durch $m$ **Boolesche Funktionen** zusammengesetzt werden.

# Boolesche Funktionen

*Wie viele n-stellige Boolesche Funktionen gibt es ?*

- Kombination aller $2^n$ $n$-Tupel aus $\{0, 1\}$ der Argumente mit den Booleschen Werten $\{0, 1\}$: $2^{(2^n)}$
- Für $n = 1$: $f_0(x) = 0$ Kontradiktion (0-stellig)

  $f_1(x) = x$ Identität

  $f_2(x) = -x$ Negation

  $f_3(x) = 1$ Tautologie (0-stellig)
- Für $n = 2$: 16 zweistellige Boolesche Funktionen

Einige davon sind lediglich auf zwei Argumente erweiterte null- oder einstellige Boolesche Funktionen: $f_0$, $f_3$, $f_5$, $f_{10}$, $f_{12}$, $f_{15}$ (folgende Folien)

# Zweistellige Boolesche Funktionen

| $x_2 =$ <br> $x_1 =$ | 0 1 0 1 <br> 0 0 1 1 | Term | Bezeichnung | Sprechweise |
|---|---|---|---|---|
| $f_0$ | 0 0 0 0 | $0$ | Nullfunktion | |
| $f_1$ | 0 0 0 1 | $x_1 x_2$ | Konjunktion | $x_1$ AND $x_2$ |
| $f_2$ | 0 0 1 0 | $x_1 \overline{x_2}$ | 1. Differenz | $x_1$ AND NOT $x_2$ |
| $f_3$ | 0 0 1 1 | $x_1$ | 1. Identität | |
| $f_4$ | 0 1 0 0 | $\overline{x_1} x_2$ | 2. Differenz | NOT $x_1$ AND $x_2$ |
| $f_5$ | 0 1 0 1 | $x_2$ | 2. Identität | |
| $f_6$ | 0 1 1 0 | $\overline{x_1} x_2 + x_1 \overline{x_2}$ | Antivalenz | $x_1$ XOR $x_2$ |
| $f_7$ | 0 1 1 1 | $x_1 + x_2$ | Disjunktion | $x_1$ OR $x_2$ |

# Zweistellige Boolesche Funktionen (Forts.)

| $x_2 =$ / $x_1 =$ | 0 1 0 1 / 0 0 1 1 | Term | Bezeichnung | Sprechweise |
|---|---|---|---|---|
| $f_8$ | 1 0 0 0 | $\overline{x_1 + x_2}$ | Negatdisjunktion | $x_1$ NOR $x_2$ |
| $f_9$ | 1 0 0 1 | $(\overline{x_1} + x_2)(x_1 + \overline{x_2})$ | Äquivalenz | $x_1 \Leftrightarrow x_2$ |
| $f_{10}$ | 1 0 1 0 | $\overline{x_2}$ | 2. Negation | NOT $x_2$ |
| $f_{11}$ | 1 0 1 1 | $x_1 + \overline{x_2}$ | 2. Implikation | $x_2 \Rightarrow x_1$ |
| $f_{12}$ | 1 1 0 0 | $\overline{x_1}$ | 1. Negation | NOT $x_1$ |
| $f_{13}$ | 1 1 0 1 | $\overline{x_1} + x_2$ | 1. Implikation | $x_1 \Rightarrow x_2$ |
| $f_{14}$ | 1 1 1 0 | $\overline{x_1 x_2}$ | Negatkonjunktion | $x_1$ NAND $x_2$ |
| $f_{15}$ | 1 1 1 1 | 1 | Einsfunktion | |

„genau dann, wenn“

„impliziert“

# Vollständige Operatorensysteme

1. Alle Booleschen Funktionen können mithilfe der
   - **Negation** ($-$, NOT),
   - **Konjunktion** ($\cdot$, AND) und
   - **Disjunktion** ($+$, OR)

   dargestellt werden. $\rightarrow$ Boolsche Basis

2. Alle Booleschen Funktionen können
   - **entweder** mithilfe der Negation und der Konjunktion
   - **oder** mithilfe der Negation und der Disjunktion

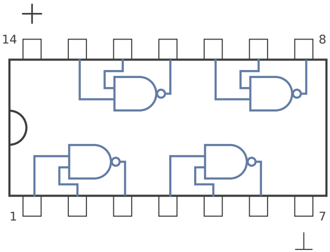
   dargestellt werden. $\rightarrow$ De Morgan-Basis

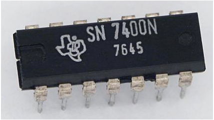
3. Alle Booleschen Funktionen können
   - entweder mithilfe der **NAND-Verknüpfung**
   - oder mithilfe der **NOR-Verknüpfung**

   dargestellt werden.

# Der 7400er-Chip

Chip der 7400er-Serie mit 4 NAND-Gattern:



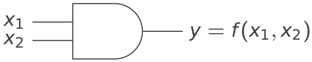

Bildquelle: Wikimedia Commons

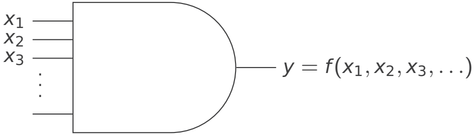
# Gliederung heute

1. Grundlagen der Digitaltechnik
2. Boolesche Algebra
3. **Realisierung in Schaltungen**

# Technische Realisierung digitaler Systeme

- Elektronische Schalter zur Verknüpfung binärer Werte
- Zusammengesetzt aus einfachen elektronischen Bauteilen (Transistoren, Dioden, Widerständen)
- Abbildung von Booleschen Funktionen mit $1, \ldots, n$ Eingängen $(x_1, x_2, x_3, \ldots) \in \{0, 1\}^n$ und einem Ausgang $y \in \{0, 1\}$

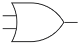
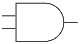
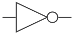
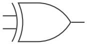
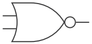
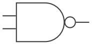



| $x_1$ | $x_2$ | $y$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | |
| 0 | 1 | |
| 1 | 0 | |
| 1 | 1 | |

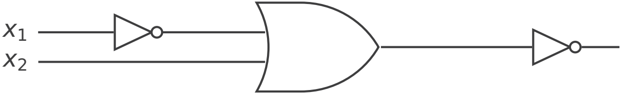
| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $\ldots$ | $y$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | | |
| 0 | 0 | 1 | | |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | | |
| 1 | 1 | 1 | | |

# Wichtige Boolesche Funktionen als Gatter

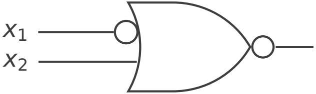
| Eingabe | | Ausgabe | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | elementar | | | kombiniert | | |
| $x_1$ | $x_2$ | $x_1 + x_2$ | $x_1 x_2$ | $\overline{x_1}$ | $\overline{x_1} x_2 + x_1 \overline{x_2}$ | $\overline{x_1 + x_2}$ | $\overline{x_1 x_2}$ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Schaltsymbol | |  |  |  |  |  |  |
| Bezeichnung | | OR | AND | NOT | XOR | NOR | NAND |

# Darstellungsvarianten

Realisierung der Booleschen Funktion $\overline{\overline{x_1} + x_2}$ mit Gattern:




explizite Darstellung




vereinfachte Darstellung

# Beispiel einer logischen Schaltung

**Gesucht** Schaltung, die 1 ausgibt, wenn einer oder zwei von drei Eingängen $x_1, x_2, x_3$ den Wert 1 annehmen.

Wahrheitstabelle:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $y$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

# Beispiel einer logischen Schaltung

**Gesucht** Schaltung, die 1 ausgibt, wenn einer oder zwei von drei Eingängen $x_1, x_2, x_3$ den Wert 1 annehmen.

Wahrheitstabelle, Boolesche Funktion:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $y$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| $\boxed{1}$ | $\boxed{0}$ | $\boxed{0}$ | 1 ✓ |
| $\boxed{0}$ | $\boxed{1}$ | 0 | 1 ✓ |
| $\boxed{1}$ | 1 | $\boxed{0}$ | 1 ✓ |
| $\boxed{0}$ | 0 | $\boxed{1}$ | 1 ✓ |
| $\boxed{1}$ | $\boxed{0}$ | 1 | 1 ✓ |
| $\boxed{0}$ | $\boxed{1}$ | $\boxed{1}$ | 1 ✓ |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

$$y = \overline{x_1}x_2 + \overline{x_1}x_3 + x_1\overline{x_2} + x_1\overline{x_3}$$

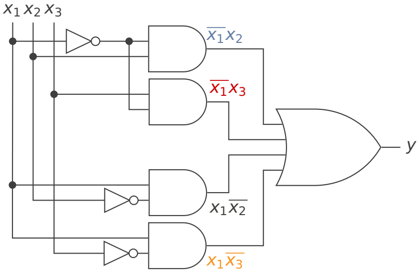
# Beispiel einer logischen Schaltung

**Gesucht** Schaltung, die 1 ausgibt, wenn einer oder zwei von drei Eingängen $x_1, x_2, x_3$ den Wert 1 annehmen.

Wahrheitstabelle, Boolesche Funktion, Realisierung:

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $y$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 ✓ |
| 0 | 1 | 0 | 1 ✓ |
| 1 | 1 | 0 | 1 ✓ |
| 0 | 0 | 1 | 1 ✓ |
| 1 | 0 | 1 | 1 ✓ |
| 0 | 1 | 1 | 1 ✓ |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

$$y = \overline{x_1}x_2 + \overline{x_1}x_3 + x_1\overline{x_2} + x_1\overline{x_3}$$



# Syllabus – Wintersemester 2020/21

| | | |
|---|---|---|
| 07.10.20 | 1. | Einführung |
| 14.10.20 | 2. | Kombinatorische Logik I |
| 21.10.20 | 3. | Kombinatorische Logik II |
| 28.10.20 | | (Reserve) |
| 04.11.20 | 4. | Sequenzielle Logik |
| 11.11.20 | 5. | Arithmetik I |
| 18.11.20 | 6. | Arithmetik II |
| 25.11.20 | 7. | Befehlssatzarchitektur (ARM) I |
| 02.12.20 | 8. | Befehlssatzarchitektur (ARM) II |
| 09.12.20 | 9. | Prozessorarchitekturen |
| 16.12.20 | 10. | Ein-/Ausgabe |
| 06.01.21 | 11. | Speicher |
| 13.01.21 | 12. | Leistung |
| 20.01.21 | 13. | Wiederholung, Fragestunde |
| **27.01.21** | | **Klausur (1. Termin)** |