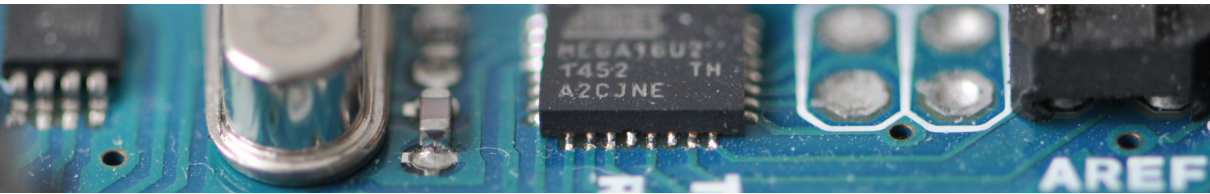
universität innsbruck



Rechnerarchitektur

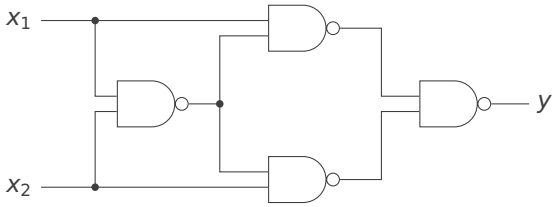
Kombinatorische Logik II

Univ.-Prof. Dr.-Ing. Rainer Böhme

Wintersemester 2020/21 · 21. Oktober 2020

Was tut diese Schaltung?

24 82 94 16



x_1	x_2	y
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

Bitte wählen Sie die passende Spalte für y in ARSnova.

Zugang: `https://arsnova.uibk.ac.at` mit Zugangsschlüssel **24 82 94 16**. Oder scannen Sie den QR-Kode.

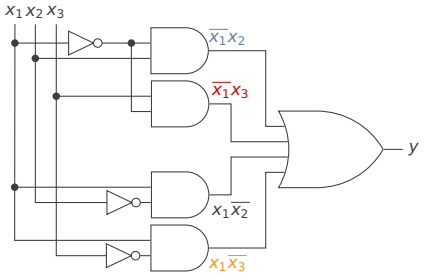
Beispiel einer logischen Schaltung (W)

Gesucht Schaltung, die 1 ausgibt, wenn einer oder zwei von drei Eingängen x_1, x_2, x_3 den Wert 1 annehmen.

Wahrheitstabelle, Boolesche Funktion, Realisierung:

x_1	x_2	x_3	y	
0	0	0	0	
1	0	0	1	✓
0	1	0	1	✓
1	1	0	1	✓
0	0	1	1	✓
1	0	1	1	✓
0	1	1	1	✓
1	1	1	0	

$$y = \overline{x_1}x_2 + \overline{x_1}x_3 + x_1\overline{x_2} + x_1\overline{x_3}$$



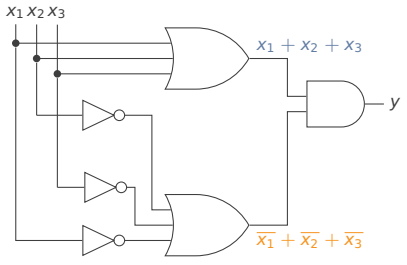
Beispiel einer logischen Schaltung (Forts.)

Gesucht Schaltung, die 1 ausgibt, wenn einer oder zwei von drei Eingängen x_1, x_2, x_3 den Wert 1 annehmen.

Alternative:

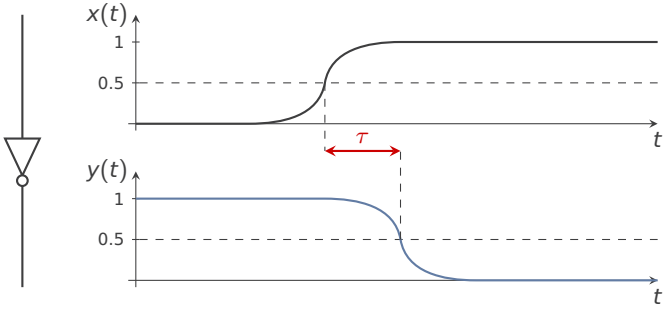
x_1	x_2	x_3	y
0	0	0	0
1	0	0	1
0	1	0	1
1	1	0	1
0	0	1	1
1	0	1	1
0	1	1	1
1	1	1	0

$$y = (x_1 + x_2 + x_3)(\overline{x_1} + \overline{x_2} + \overline{x_3})$$



Zeitverhalten eines Gatters

Gatter sind physische Bausteine. Sie verhalten sich nicht ideal.



Das Ausgangssignal reagiert verzögert

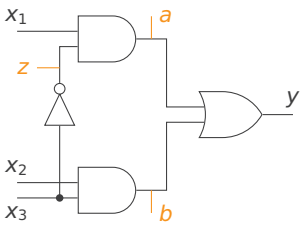
Die Verzögerung τ ist definiert als Dauer zwischen den Zeitpunkten der Überschreitung des 50 %-Pegels an Ein- bzw. Ausgang.

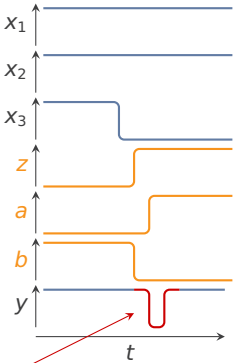
Störimpulse durch Laufzeiteffekte (korrigiert)

Beispiel: Eingang x_3 steuert, ob x_1 oder x_2 am Ausgang y anliegt.

x_1	x_2	x_3	y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$$y = \overline{x}_3 x_1 + x_3 x_2$$





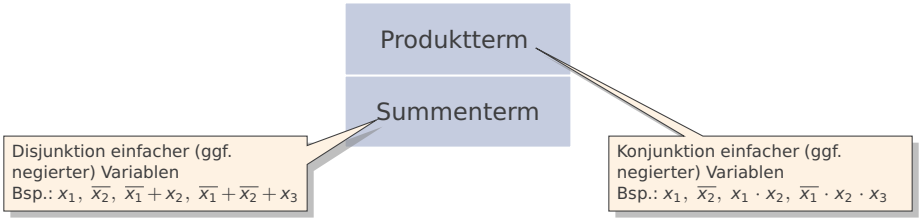
„statischer Eins-Hazard“

Die im Stream gezeigte Folie zeigte leider eine Schaltung, die nicht zu Ausdruck und Tabelle passte. Sorry.

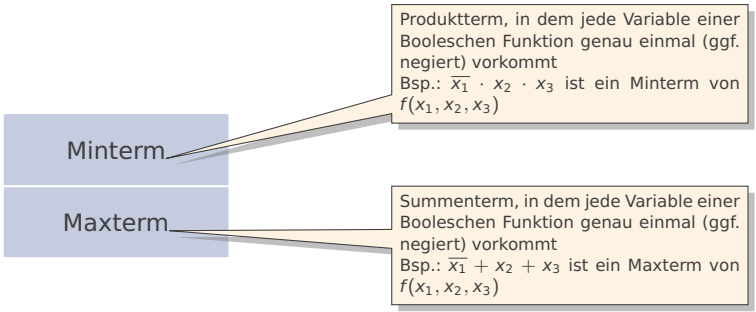
Gliederung heute

0. Konfrontation mit der Realität
1. **Kanonische Darstellungen**
2. Minimierung
3. Typische Schaltnetze

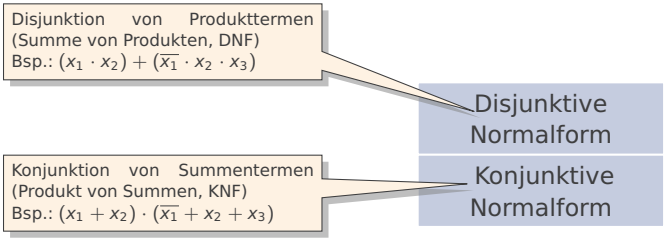
Systematik der Darstellung Boolescher Funktionen



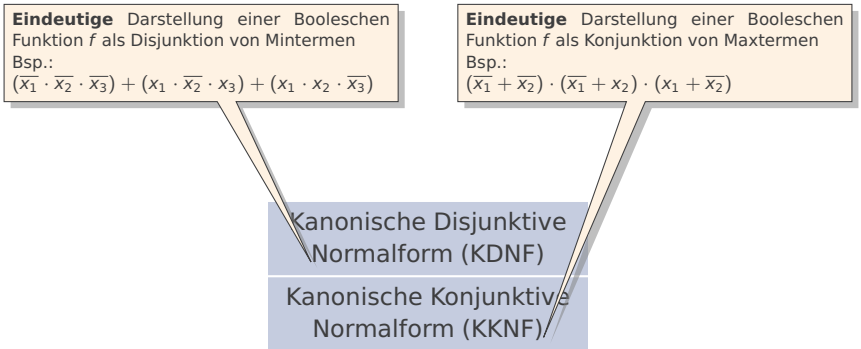
Systematik der Darstellung Boolescher Funktionen



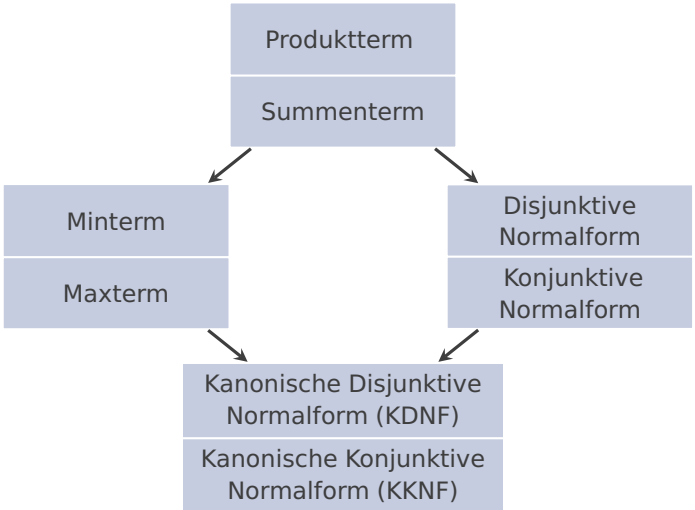
Systematik der Darstellung Boolescher Funktionen



Systematik der Darstellung Boolescher Funktionen



Systematik der Darstellung Boolescher Funktionen



Sätze zur Darstellung Boolescher Funktionen

1. **Jede** Boolesche Funktion lässt sich als **genau eine KDNF** (Disjunktion von Mintermen) darstellen.
2. **Jede** Boolesche Funktion lässt sich als **genau eine KKNF** (Konjunktion von Maxtermen) darstellen.
3. **Jede KDNF** kann in eine KKNF umgewandelt werden.
4. **Jede KKNF** kann in eine KDNF umgewandelt werden.
5. Aufgrund der **Dualität** gilt:

$$\text{KKNF}\left(f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right) = \overline{\text{KDNF}\left(\overline{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right)}$$

und

$$\text{KDNF}\left(f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right) = \overline{\text{KKNF}\left(\overline{f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right)}$$

Bildung der KDNF (Disjunktion von Mintermen)

aus der Wahrheitstabelle einer n-stelligen Booleschen Funktion

- **Idee:** Summe nimmt den Wert 1 an, wenn mindestens ein Summand 1 ist.
- Für jede Zeile der Wahrheitstabelle mit $f(x_1, \ldots, x_n) = 1$ wird einer der Minterme ermittelt.
- Variable x_i wird negiert, wenn in der entsprechenden Zelle der Wert der Variable 0 ist.

Beispiel

x_1	x_2	x_3	$f(\boldsymbol{x})$	
⋮	⋮	⋮	⋮	
1	0	1	1	$\longrightarrow x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3$
⋮	⋮	⋮	⋮	

Bildung der KKNF (Konjunktion von Maxtermen)

aus der Wahrheitstabelle einer n-stelligen Booleschen Funktion

- **Idee:** Produkt nimmt den Wert 0 an, wenn mindestens ein Faktor 0 ist.
- Für jede Zeile der Wahrheitstabelle mit $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ wird einer der Maxterme ermittelt.
- Variable x_i wird negiert, wenn in der entsprechenden Zelle der Wert der Variable 1 ist.

Beispiel

x_1	x_2	x_3	$f(\boldsymbol{x})$	
⋮	⋮	⋮	⋮	
0	0	1	0	$\rightarrow (x_1 + x_2 + \overline{x_3})$
⋮	⋮	⋮	⋮	

Äquivalenz von und über Normalformen

(Folgesätze)

- Die Darstellung einer Booleschen Funktion durch KDNF bzw. KKNF ist (abgesehen von der Reihenfolge) **eindeutig**.
- Zwei allgemeine Darstellungen Boolescher Funktionen sind **äquivalent**, wenn sie (durch Umformungen nach den Regeln der Booleschen Algebra) auf die gleiche KDNF bzw. KKNF zurückgeführt werden können.

Eindeutigkeit

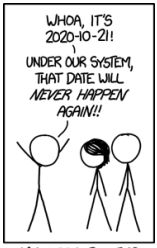


Illustration: xkcd.com

Realisierung günstiger Schaltungen

Systematische Realisierung einer Booleschen Funktion f in drei Schritten:

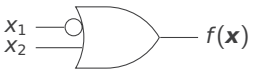
1. Aufstellen der Wahrheitstabelle von f
2. Bilden der KDNF (oder KKNF) von f

KDNF: $f(x_1, x_2) = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} + \overline{x_1} \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2$

KKNF: $f(x_1, x_2) = \overline{x_1} + x_2$

3. Schaltungstechnische Realisierung mit Gattern (hier: KKNF)

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1



Einfache Optimierungsregel

Eine KDNF ist günstiger als eine KKNF genau dann, wenn nur für wenige Kombinationen der Eingabewerte $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$ gilt.

Bemerkungen zur technischen Realisierung

Alle Booleschen Funktionen lassen sich mit . . .

- maximal **zwei Gatterebenen** realisieren, wenn alle Eingangssignale x_i sowohl einfach als auch **negiert** vorliegen,
- sonst mit maximal **drei Gatterebenen**.

Realisierung einer KDNF

- Max. 2^n AND-Gatter mit je n Eingängen (eines pro Minterm)
- Ein OR-Gatter zur Disjunktion aller Minterme (mit max. 2^n Eingängen)

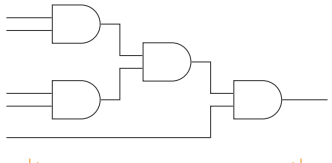
Realisierung einer KKNF

- Max. 2^n OR-Gatter mit je n Eingängen (eines pro Maxterm)
- Ein AND-Gatter zur Konjunktion aller Maxterme (mit max. 2^n Eingängen)

Bemerkungen zur technischen Realisierung (Forts.)

Viele Standardbauteile realisieren Gatter mit **zwei Eingängen**.

Beispiel für ein Gatter mit $k = 5$ Eingängen aus Standardbauteilen:



Realisierung einer **kanonischen Normalform:**

- Max. $2^n(n-1) + (2^n - 1) = n \cdot 2^n - 1$ Gatter (mit 2 Eingängen)
- Max. $\log_2 n + \log_2 (2^n) = \log_2 n + n$ Ebenen (aus Gattern mit 2 Eingängen)

„Universelle“ Gatter

NAND-Gatter zur Realisierung von [K]**DNF**

NOR-Gatter zur Realisierung von [K]**KNF**

Gliederung heute

0. Konfrontation mit der Realität
1. Kanonische Darstellungen
2. **Minimierung**
3. Typische Schaltnetze

Minimierung

„Einfache“ Optimierungskriterien

- Anzahl Gatter $\rightarrow$ Anzahl **Boolescher Operationen**
- Anzahl Verbindungen
- Anzahl Produkt- bzw. Summenterme

Ansätze

- Händisches Umformen nach Regeln der Booleschen Algebra
- Graphische Verfahren (z. B. **Karnaugh-Veitch-Diagramme**)
- Algorithmen (z. B. Quine & McCluskey, auch bei vielen Variablen)

Resolutionsregeln

Für [K]DNF

Wenn sich zwei Summanden nur in genau einer komplementären Variable unterscheiden, dann können beide Terme durch ihren gemeinsamen Teil ersetzt werden.

Beispiel

$$x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot x_4 + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot \overline{x_4} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3$$

Beweis über

- Distributivität $x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 \cdot (x_4 + \overline{x_4})$ sowie (3)
- komplementäre und neutrale Elemente. (7) (6)

Siehe Folie **Axiome** aus der vergangenen Woche.

Resolutionsregeln (Forts.)

Für [K]KNF

Wenn sich zwei Faktoren nur in genau einer komplementären Variable unterscheiden, dann können beide Terme durch ihren gemeinsamen Teil ersetzt werden.

Beispiel

$$(x_1 + x_2 + \overline{x_3} + \overline{x_4}) \cdot (x_1 + x_2 + x_3 + \overline{x_4}) \quad \Leftrightarrow \quad (x_1 + x_2 + \overline{x_4})$$

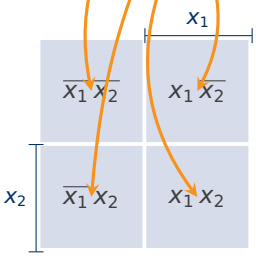
Beweis über

- Kommutativität $(x_1 + x_2 + \overline{x_4} + \overline{x_3}) \cdot (x_1 + x_2 + \overline{x_4} + x_3)$ (1)
- Assoziativität $((x_1 + x_2 + \overline{x_4}) + \overline{x_3}) \cdot ((x_1 + x_2 + \overline{x_4}) + x_3)$ (11)
- Distributivität $(x_1 + x_2 + \overline{x_4}) + (x_3 \cdot \overline{x_3})$ sowie (4)
- komplementäre und neutrale Elemente. (8) (5)

Siehe Folie **Axiome** aus der vergangenen Woche.

Karnaugh–Veitch-Diagramme (KV)

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

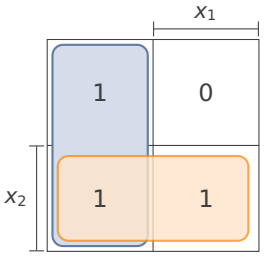


- 2-dimensionale Darstellung
  der Funktionswerte aus der Wahrheitstabelle
- Jedes Element der Matrix repräsentiert einen Minterm.
- Anordnung der Elemente, sodass sich zwei (zyklisch) **benachbarte Elemente im Vorzeichen genau einer Variable unterscheiden**
- Ermöglicht Zusammenfassung benachbarter Minterme

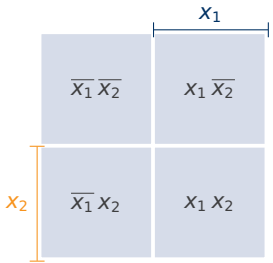
Herkunft: Maurice Karnaughs Weiterentwicklung (1953) der Diagramme von Edward Veitch (’52)

Minimierung einer KDNF mit KV-Diagrammen

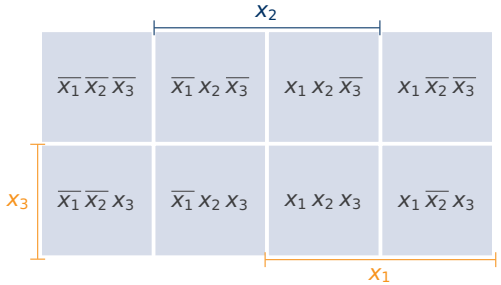
1. Gegebene KDNF: z. B. $f(x_1, x_2) = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} + \overline{x_1} \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2$
2. Erstellen des KV-Diagramms:
   1 für jeden Minterm mit $f(\boldsymbol{x}) = 1$, sonst 0
3. Markierung möglichst weniger, großer, rechteckiger und ggf. überlappender Bereiche aus 2^k Einsen, sodass alle Einsen überdeckt sind
4. Bildung einer minimalen DNF durch Summierung von genau einem Produktterm pro markiertem Bereich: $f(x_1, x_2) = \overline{x_1} + x_2$



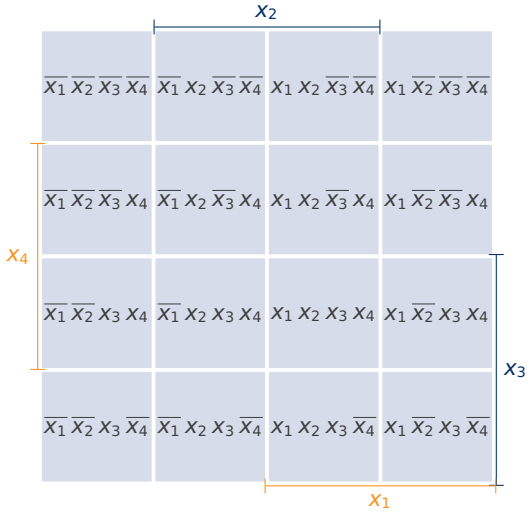
KV-Diagramme für mehrstellige Funktionen



KV-Diagramme für mehrstellige Funktionen

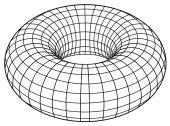


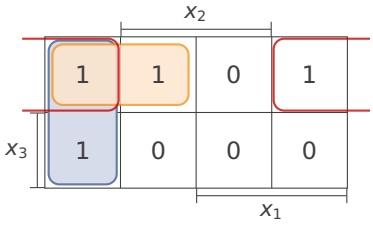
KV-Diagramme für mehrstellige Funktionen



Beispiel mit zyklischer Markierung

Minimiere $y = f(x_1, x_2, x_3)$





x_1	x_2	x_3	y
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Minimale DNF: $y = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} + \overline{x_1} \cdot \overline{x_3} + \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}$

Minimierung einer KKNF mit KV-Diagrammen

1. Markierung möglichst weniger, großer, rechteckiger und ggf. überlappender Bereiche aus 2^k Nullen, sodass alle Nullen überdeckt sind
2. Bildung einer DNF durch Summierung von genau einem Produktterm pro markiertem Bereich
3. Umwandlung in eine minimale KNF durch abschließende Negation

Grenzen der Karnaugh–Veitch-Diagramme

- Zyklische Markierungen können leicht übersehen werden.
- KV-Diagramme für Boolesche Funktionen mit fünf oder mehr Stellen sind ungebräuchlich.

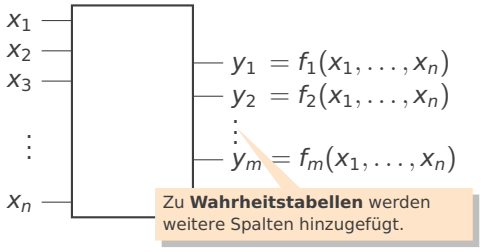
Gliederung heute

0. Konfrontation mit der Realität
1. Kanonische Darstellungen
2. Minimierung
3. **Typische Schaltnetze**

Synthese von Schaltnetzen

(Wiederholung)

Jede Schaltfunktion $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^m$ mit $m, n \geq 1$ ist
in m Boolesche Funktionen mit den gleichen n Eingangsvariablen zerlegbar:

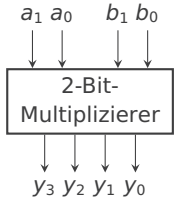


Definition

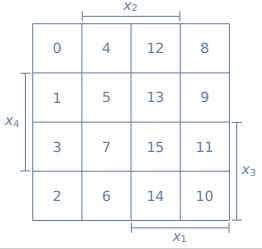
Ein **Schaltnetz** (auch synonym: *kombinatorische Logik*) ist eine schaltungstechnische Realisierung einer Schaltfunktion.

Beispiel mit Minimierung: 2-Bit-Multiplizierer

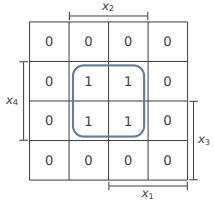
	1. Faktor		2. Faktor		Ergebnis			
$a \times b = y$	$a_1 = x_1$	$a_0 = x_2$	$b_1 = x_3$	$b_0 = x_4$	y_3	y_2	y_1	y_0
$0 \times 0 = 0$	0	0	0	0	0	0	0	0
$0 \times 1 = 0$	0	0	0	1	0	0	0	0
$0 \times 2 = 0$	0	0	1	0	0	0	0	0
$0 \times 3 = 0$	0	0	1	1	0	0	0	0
$1 \times 0 = 0$	0	1	0	0	0	0	0	0
$1 \times 1 = 1$	0	1	0	1	0	0	0	1
$1 \times 2 = 2$	0	1	1	0	0	0	1	0
$1 \times 3 = 3$	0	1	1	1	0	0	1	1
$2 \times 0 = 0$	1	0	0	0	0	0	0	0
$2 \times 1 = 2$	1	0	0	1	0	0	1	0
$2 \times 2 = 4$	1	0	1	0	0	1	0	0
$2 \times 3 = 6$	1	0	1	1	0	1	1	0
$3 \times 0 = 0$	1	1	0	0	0	0	0	0
$3 \times 1 = 3$	1	1	0	1	0	0	1	1
$3 \times 2 = 6$	1	1	1	0	0	1	1	0
$3 \times 3 = 9$	1	1	1	1	1	0	0	1



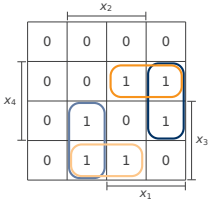
Reihenfolge für KV-Diagramm



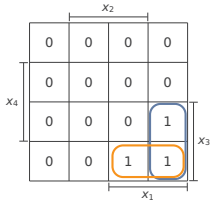
KV-Diagramme für den 2-Bit-Multiplizierer



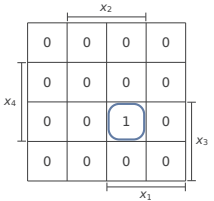
$$y_0 = x_2 \cdot x_4$$
$$= a_0 \cdot b_0$$



$$y_1 = \overline{x_1} x_2 x_3 + x_2 x_3 \overline{x_4} + x_1 \overline{x_3} x_4 + x_1 \overline{x_2} x_4$$
$$= \overline{a_1} a_0 b_1 + a_0 b_1 \overline{b_0} + a_1 \overline{b_1} b_0 + a_1 \overline{a_0} b_0$$



$$y_2 = x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3 + x_1 \cdot x_3 \cdot \overline{x_4}$$
$$= a_1 \cdot \overline{a_0} \cdot b_1 + a_1 \cdot b_1 \cdot \overline{b_0}$$



$$y_3 = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$$
$$= a_1 \cdot a_0 \cdot b_1 \cdot b_0$$

Realisierung als minimiertes Schaltnetz

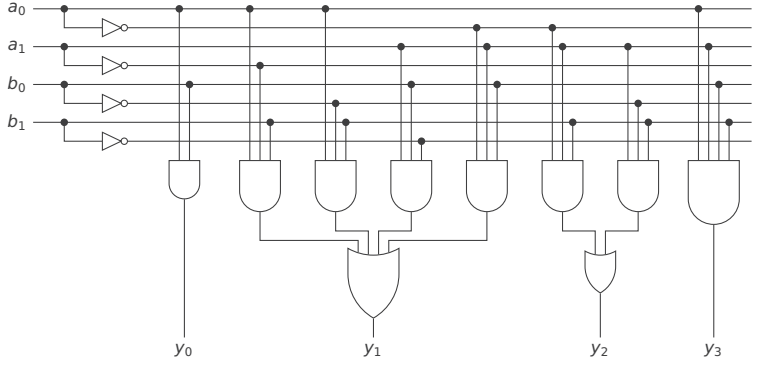
2-Bit-Multiplizierer

$$y_0 = a_0 \cdot b_0$$

$$y_1 = a_0 \cdot \overline{a_1} \cdot b_1 + a_0 \cdot \overline{b_0} \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0 \cdot \overline{b_1} + \overline{a_0} \cdot a_1 \cdot b_0$$

$$y_2 = \overline{a_0} \cdot a_1 \cdot b_1 + a_1 \cdot \overline{b_0} \cdot b_1$$

$$y_3 = a_0 \cdot a_1 \cdot b_0 \cdot b_1$$

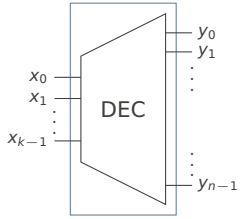


Dekodierer

k-zu-n-Dekodierer: **Auswahl eines** von n Ausgängen $y_i = 1$ durch Binärdarstellung an den Eingängen $(x_0, \ldots, x_{k-1})$.

Es gilt $0 \leq i < n$ und $1 \leq n \leq 2^k$.

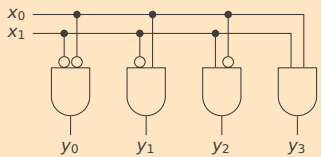
Anwendung: Adressen oder Instruktionen



Beispiel: 2-zu-4-Dekodierer

x_1	x_0	y_3	y_2	y_1	y_0
0	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	0	0	0

$$y_0 = \overline{x_0} \cdot \overline{x_1}$$
$$y_1 = x_0 \cdot \overline{x_1}$$
$$y_2 = \overline{x_0} \cdot x_1$$
$$y_3 = x_0 \cdot x_1$$

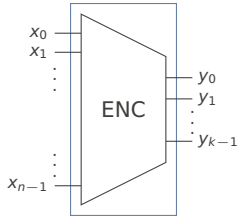


Kodierer

n-zu-k-Kodierer: Ausgabe $(y_0, \ldots, y_{k-1})$ ist **Binärdarstellung** für den Index **eines** aktiven Eingangs $x_i = 1$.

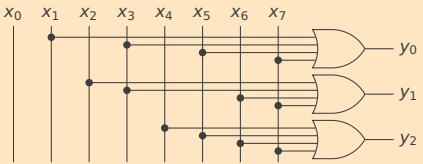
Es gilt $0 \leq i < n$ und $k \geq \lceil \log_2 n \rceil$.

Anwendung: Kodierung gedrückter Taste



Beispiel: Naiver 8-zu-3-Kodierer

$$y_0 = x_1 + x_3 + x_5 + x_7$$
$$y_1 = x_2 + x_3 + x_6 + x_7$$
$$y_2 = x_4 + x_5 + x_6 + x_7$$



Problem: Undefinierte Ausgabe, falls mehrere Eingänge aktiv sind.

Syllabus – Wintersemester 2020/21

07.10.20	1.	Einführung
14.10.20	2.	Kombinatorische Logik I
21.10.20	3.	Kombinatorische Logik II
28.10.20	4.	Sequenzielle Logik I
04.11.20	5.	Sequenzielle Logik II
11.11.20	6.	Arithmetik I
18.11.20	7.	Arithmetik II
25.11.20	8.	Befehlssatzarchitektur (ARM) I
02.12.20	9.	Befehlssatzarchitektur (ARM) II
09.12.20	10.	Prozessorarchitekturen
16.12.20	11.	Ein-/Ausgabe
06.01.21	12.	Speicher
13.01.21	13.	Leistung
20.01.21	14.	Wiederholung, Fragestunde
27.01.21		**Klausur (1. Termin)**